ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (Διαιρετότητα)

Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

i) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$, τότε $|\alpha|=|\beta|$

ii) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$

iii) Αν $\alpha|\beta$, τότε $\alpha|\lambda\beta$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$

iv) Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta \pm \gamma)$

v) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta \neq 0$ τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $\alpha|\beta \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}): \beta = k \cdot \alpha$
$\beta|\alpha \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{Z}): \alpha = \lambda \cdot \beta$
$\Rightarrow \alpha = k \cdot \lambda \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 0$ ή $k \cdot \lambda = 1$

(Αδύνατον $\alpha|b$)

και λόγω ότι $k, \lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow k=\lambda=1$ ή $k=\lambda=-1$

τότε $|\alpha|=|\beta|$.

ii) $\alpha|\beta \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}): \beta = k \cdot \alpha$
$\beta|\gamma \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{Z}): \gamma = \lambda \beta = k \cdot \lambda\, \alpha$

Άρα, $\alpha|\gamma$.

iii) $\alpha|\beta \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}): \beta = k \cdot \alpha \Rightarrow \lambda \cdot \beta = \lambda \cdot k \alpha \Rightarrow \alpha|\lambda\beta$

iv) $\alpha|\beta \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}): \beta = k \cdot \alpha$
$\alpha|\gamma \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{Z}): \gamma = \lambda \cdot \alpha$
$\Rightarrow (\beta+\gamma) = (k+\lambda) \cdot \alpha \Rightarrow \alpha|(\beta+\gamma)$.

όμοια και η αφαίρεση $\alpha|(\beta-\gamma)$.

v) $\alpha|\beta$ και $\beta \neq 0 \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}): \beta = k \cdot \alpha$, $k \neq 0$

Επομένως, $|\beta| = |k| \cdot |\alpha| \geq |\alpha|$, διότι $|k| \geq 1$

Συμπέρασμα:

Από τις (iii) και (iv) προκύπτει ότι:

"Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(k\beta + \lambda\gamma)$ $\forall k, \lambda \in \mathbb{Z}$"

όπου $k \cdot \beta + \lambda \cdot \gamma$, $k, \lambda \in \mathbb{Z}$ γραμμικός συνδυασμός των β και γ.

Εφαρμογές

1) Αν $a, \delta \in \mathbb{Z}$ με $\delta | (2a+1)$ και $\delta | (3a-1)$ να βρεθούν οι πιθανές θετικές τιμές του δ

ΛΥΣΗ

$\delta | (2a+1)$ και $\delta | (3a-1)$

όμως ο δ διαιρεί και τον αριθμό $3(2a+1)-2(3a-1)=5$

Αφού λοιπόν $\delta > 0$ και $\delta | 5$ τότε $\delta = 1$ ή $\delta = 5$.

2) ΝΔΟ $9^{\nu+1} - 8\nu - 9 = \lambda \cdot 64$, $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ

Μέσω μαθηματικής επαγωγής

για $\nu = 1$, $9^2 - 8 - 9 = 64 = 1 \cdot 64$ πολ/σιο του 64

Έστω ότι ισχύει

$9^{\nu+1} - 8\nu - 9 = 64 \cdot \lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

και ΘΔΟ

$9^{\nu+2} - 8(\nu+1) - 9 = 64 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$

$9^{\nu+2} - 8(\nu+1) - 9 = 9^{\nu+1} \cdot 9 - 8\nu - 17 = 9(64\lambda + 8\nu + 9) - 8\nu - 17 =$
$= 9\lambda \cdot 64 + 72\nu + 81 - 8\nu - 17 = 64(9\lambda + \nu + 1) = 64 \cdot k = k \cdot 64$

Άρα, η ισότητα αληθεύει για όλους τους θετ. ακεραίους

3) ΝΔΟ ο 3 διαιρεί τους ακεραίους α και β αν ο 3 διαιρεί το άθροισμα $a^2 + \beta^2$.

ΛΥΣΗ

Έστω ο $3 | a$ και $3 | \beta$ τότε $3 | a^2$ και $3 | \beta^2$

τότε $3 | (a^2 + \beta^2)$.

Στην ουσία κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων (iii) & (iv) που αποδείξαμε προηγουμένως

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν $\alpha|\beta$ και $\gamma|\delta$ τότε νδο $\alpha\cdot\gamma \,|\, \beta\cdot\delta$.

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha|\beta \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}): \beta = k\cdot\alpha \\ \gamma|\delta \Leftrightarrow (\exists \lambda\in\mathbb{Z}): \delta = \lambda\cdot\gamma\end{array}\right| \Rightarrow \beta\cdot\delta = (k\cdot\lambda)\,\alpha\cdot\gamma$$

Δηλ. $(\exists \mu = k\cdot\lambda \in\mathbb{Z}): \ \beta\cdot\delta = \mu\cdot(\alpha\cdot\gamma)$.

2) Αν $11|(\alpha+2)$ και $11|(35-\beta)$ τότε νδο $11|\alpha+\beta$

ΛΥΣΗ

ΘΔΟ $11|\alpha+\beta \Leftrightarrow (\exists \mu\in\mathbb{Z}): (\alpha+\beta) = \mu\cdot 11$.

Έστω ότι:

$$11|(\alpha+2) \Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}): (\alpha+2) = k\cdot 11 \Rightarrow \alpha = 11\cdot k - 2 \quad ①$$

και

$$11|(35-\beta) \Leftrightarrow (\exists \lambda\in\mathbb{Z}): (35-\beta) = \lambda\cdot 11 \Rightarrow \beta = 35 - 11\cdot\lambda. \quad ②$$

Προσθέτοντας τις ① + ② παίρνουμε ότι

$$\alpha+\beta = 11(k-\lambda)+33 = 11(k-\lambda+3) = 11\cdot\mu, \ \mu\in\mathbb{Z}$$

όπου $\mu = k-\lambda+3$.

3) Αν η διαφορά 2 ακεραίων είναι άρτιος αριθμός, τότε νδο η διαφορά τετραγώνων τους είναι πολλ/σιο του 4.

ΛΥΣΗ

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και τέτοιοι ώστε:

$\alpha-\beta = 2k, \ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \beta+2k, \ k\in\mathbb{Z}$

$$\alpha^2-\beta^2 = (\beta+2k)^2-\beta^2 = (\beta+2k-\beta)(\beta+2k+\beta) =$$

$$= 2k\cdot(2k+2\beta) = 4(k\beta+k^2) \rightarrow \text{πολλ/σιο του 4.}$$

4) Εαν $m|a$ και $m>1$ τότε νδο $m \nmid (a+1)$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Εστω για τα δεδομένα μας ότι $m|(a+1)$

Τότε, αφού το $m|a \Rightarrow m|[(a+1)-a]$ (από τις ιδιότητες της Διαιρετότητας)

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι $m|1$ πράγμα άτοπο διότι $m>1$

5) ΝΔΟ $2|(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)$ $\forall a,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Προφανώς διακρίναμε το πρόβλημα σε περιπτώσεις

α. Τουλάχιστον 2 από τους a,β,γ άρτιοι (πχ οι a και β)

Τότε $a-\beta$ άρτιος $\Rightarrow (a-\beta)=2k, k\in\mathbb{Z}$

ομοίως και για τις διαφορές $\beta-\gamma$ και $\gamma-a$.

Άρα, το γινόμενο: $(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)$ διαιρείται του 2

β. Τουλάχιστον 2 από τους a,β,γ περιττοί (πχ οι a και β)

Τότε $a-\beta$ άρτιος (αφού $\beta=2\lambda+1$ και $a=2k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a-\beta=2(k-\lambda)$ άρτιος) οπότε συνεχίζουμε όμοια με το α.

6) Εστω a περιττός ακέραιος. Να δείξετε ότι:

i. Το τετράγωνο του a είναι μορφής $a^2=4\lambda+1$, $\lambda\in\mathbb{Z}$

ii. $32|(a^2+3)(a^2+7)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i. Εστω τυχόν a περιττός ακέραιος

τότε $a=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$

$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1=4\lambda+1, \lambda\in\mathbb{Z}$

όπου $\lambda=k^2+k$

ii. Λόγω ότι ο a περιττός από την (i) έχουμε:

$(a^2+3)(a^2+7)=(4\lambda+1+3)(4\lambda+1+7)=$

$=(4\lambda+4)(4\lambda+8)=16\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda+2)=32\mu, \mu\in\mathbb{Z}$

όπου $(\lambda+1)(\lambda+2)=2\mu$, δηλ. άρτιος ως γινόμ. 2 διαδοχ. ακεραίων

7) Να αποδείξετε ότι $4 \nmid (a^2+2)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ

- Εαν $a=2k$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε:

  $a^2+2 = 4k^2+2 = 4\lambda+2 > 4$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ $\lambda = k^2$

  Άρα, δεν είναι πολλ/σιο του 4.

- Εαν $a=2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε:

  $a^2+2 = (2k+1)^2+2 = 4k^2+4k+3 = 4(k^2+k)+3 =$

  $= 4\cdot\lambda+3 > 4$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ $\lambda = k^2+k$

  Άρα, δεν είναι πολλ/σιο του 4.

8) ΝΔΟ δεν υπάρχουν διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι που να είναι και οι 2 τετράγωνο ακεραίων.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι υπάρχουν διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι που να είναι και οι 2 τετράγωνα ακεραίων

Ας είναι αυτοί οι a και $a+1$ τότε θα ισχύει ότι $a=k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$ & $a+1=\lambda^2$ $\lambda \in \mathbb{N}^*$

Άρα, $a+1 = k^2+1 = \lambda^2 \Leftrightarrow k^2-\lambda^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda^2-k^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda-k)(\lambda+k) = 1$, (ακερ. x ακερ. = 1)

$\Leftrightarrow \lambda-k=1$ και $\lambda+k=1 \Leftrightarrow \lambda = 1+k$ και $\lambda = 1-k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+k = 1-k \Leftrightarrow k=0$ και $\lambda=1$ Άτοπο

διότι $k \in \mathbb{N}^*$ και έτσι όλη η πρόταση ΨΕΥΔΗΣ.

9) Αν $\beta | a$ και $a,\beta \in \mathbb{N}^*$, νδο $(2^\beta-1) | (2^a-1)$.

ΛΥΣΗ

$\beta | a \Rightarrow (\exists \nu \in \mathbb{Z}): a = \nu\cdot\beta$ και ΘΔΟ 2^a-1 πολλ/σιο του $2^\beta-1$.

$2^a-1 = 2^{\nu\cdot\beta}-1 = (2^\beta)^\nu-1 = (2^\beta)^\nu-1^\nu =$

$= (2^\beta-1)\cdot\underbrace{\left((2^\beta)^{\nu-1}+(2^\beta)^{\nu-2}+\ldots+(2^\beta)^1+(2^\beta)^0\right)}_{\text{Έστω } k \in \mathbb{Z}} =$

$= k\cdot(2^\beta-1)$.

10) Να αποδείξετε ότι

i. $3|(\nu^3+2\nu)$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, ii. $5|(3\cdot 27^\nu+2\cdot 2^\nu)$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

iii. $14|(3^{4\nu+2}+5^{2\nu+1})$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) Για $\nu=0$, έχουμε $3|0$, που ισχύει, άρα η $P(0)$ πρόταση αληθής

Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(\nu)$ και ΘΔΟ $P(\nu+1)$ αληθής

① $3|(\nu^3+2\nu)$ και ΘΔΟ ισχύει η πρόταση $3|[(\nu+1)^3+2(\nu+1)]$

Πράγματι,

$(\nu+1)^3+2(\nu+1) = \nu^3+3\nu^2+3\nu+1+2\nu+2 =$

$=(\nu^3+2\nu)+3(\nu^2+\nu+1) \overset{①}{=} 3k+3(\nu^2+\nu+1) =$

$= 3(k+\nu^2+\nu+1) = 3\cdot\mu$, με $\mu = k+\nu^2+\nu+1 \in \mathbb{Z}$ και $k\in\mathbb{Z}$

Άρα, πράγματι η αρχική πρόταση αληθεύει

ii) Για $\nu=0$, έχουμε $5|5$, που ισχύει, άρα η $P(0)$ πρόταση αληθής

Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(\nu)$ και ΘΔΟ η $P(\nu+1)$ αληθής

② $5|(3\cdot 27^\nu+2\cdot 2^\nu)$ και ΘΔΟ ισχύει η πρόταση $5|(3\cdot 27^{\nu+1}+2\cdot 2^{\nu+1})$

Πράγματι,

$(3\cdot 27^{\nu+1}+2\cdot 2^{\nu+1}) = 3\cdot 27^\nu\cdot 27+2\cdot 2^\nu\cdot 2$ $(*)$

Αφού ισχύει η ② τότε $3\cdot 27^\nu+2\cdot 2^\nu = 5k$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot 27^\nu = 5k-2\cdot 2^\nu$ $k\in\mathbb{Z}$

Άρα, $(*) \rightarrow (5k-2\cdot 2^\nu)\cdot 27+2\cdot 2\cdot 2^\nu =$

$= 5\cdot 27k-2\cdot 27\cdot 2^\nu+2\cdot 2\cdot 2^\nu =$

$= 5\cdot 27k-54\cdot 2^\nu+4\cdot 2^\nu =$

$= 5\cdot 27k-50\cdot 2^\nu = 5(27k-10\cdot 2^\nu) = 5\cdot\mu$, $\mu\in\mathbb{Z}$

όπου $\mu = 27k-10\cdot 2^\nu$, $k\in\mathbb{Z}$

Άρα, πράγματι η αρχική πρόταση αληθεύει

iii) Το ερώτημα (iii) αφήνεται ως εξάσκηση!

• Εφαρμογή (για εξάσκηση):

Έστω $\alpha,\beta,k,\lambda\in\mathbb{Z}$ με $k\neq\lambda$. Εάν $(k-\lambda)|(k\alpha+\lambda\beta)$ τότε νδο $(k-\lambda)|(\lambda\alpha+k\cdot\beta)$. ◪